Merkzettel für Mathe II

erstellt aus dem Vorlesungsskript
"Einführung in die Analysis"
von Prof. Recknagel

0. Anmerkung:

Der Merkzettel liefert nur eine Auswahl der wichtigsten Axiome und Theoreme aus dem Skript der Mathe II Vorlesung des 1. und 2. Semesters, und ist nicht vollständig.

1. Grundlagen:

Abbildungen:

Man bezeichnet X den Definitionsbereich, $f(X) \subset Y$ die Wertemenge und Y den Wertebereich von f. Weiteres nennt man f

injektiv oder eineindeutig, wenn aus $x \neq x'$ $(x, x' \in X)$ folgt $f(x) \neq f(x')$;
surjektiv oder Abbildung auf Y, wenn $f(X) = Y$;
bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv.

Wichtige Gleichungen:

Für $n \in N$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Für $q \in R$, $q \neq 1$, und alle $n \in N$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Summe

Fakultät und Binomialkoeffizient:

Für $n \in N_0$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Beispiel für (einstellige) Rekursion: (n+1)! = n!(n+1)

Für $k, n \in N_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{n-l+1}{l} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$, und

Für alle $k, n \in N_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Lemma 1.1.

Für $k, n \in N$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Binomischer Lehrsatz:

Für $n \in N_0$ und $a, b \in R$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3. Anordnungsaxiome:

Der Absolutbetrag:

Für alle $x, y \in R$ gilt

$|x + y| \le |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

Theorem 3.4. (Bernoullische Ungleichung)

Für $n \in N_0$ und $x \in R$ mit $x \ge -1$ gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Dabei gilt strikte Ungleichheit bei $n \ge 2$ und $x \ne 0$

Theorem 3.5. (Bernoullische Ungleichung)

Sei $q \in R$ mit $q > 1$. Dann gibt es zu jedem $Q > 0$ ein $n \in N$ mit $q^n > Q$.

$$q^n = (1+x)^n \ge 1 + nx$$

4. Folgen, Grenzwerte und Reihen:

Definition 4.2.

Eine Folge $(a_n)_{n \in N_0}$ heißt konvergent zum Grenzwert $a \in R$,
wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in N_0$ existiert, so daß für $\forall\, n \ge N_\varepsilon$ gilt
$|a_n - a| < \varepsilon$

Definition 4.3.

Eine Folge (a_n) heißt
1.) nach oben beschränkt, wenn ein $K_O \in R$ existiert mit $a_n \le K_O$ für alle $n \in N_0$;
2.) nach unten beschränkt, wenn ein $K_U \in R$ existiert mit $a_n \ge K_U$ für alle $n \in N_0$;
3.) beschränkt, wenn sie gleichzeitig nach oben und nach unten beschränkt ist.

Theorem 4.3. (Rechenregeln konvergenter Folgen)

Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent zum Grenzwert a resp. b, dann gilt

1.) Die Folge $(c_n)_{n \in N_0}$ mit $c_n = a + b$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a + b$

2.) Die Folge $(c_n)_{n \in N_0}$ mit $c_n = a \cdot b$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a \cdot b$

3.) Sei $b \neq 0$. Die Folge $(c_n)_{n \in N_0}$ mit $c_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, \text{falls } b_n \neq 0, \\ 0, \text{falls } b_n = 0, \end{cases}$

ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \frac{a}{b}$

Theorem 4.7. (Rechenregeln für Reihen)

Seien $\sum\limits_{k \geq 0} a_k$ und $\sum\limits_{k \geq 0} b_k$ zwei konvergente Reihen zur Summe a resp. b sowie $\lambda \in$ R. Dann gilt

1.) die Reihen $\sum\limits_{k \geq 0} (a_k \pm b_k)$ sind konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$;

2.) die Reihe $\sum\limits_{k \geq 0} (\lambda \cdot a_k)$ ist konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot a$;

7. Konvergenzkriterien für Reihen:

Theorem 7.2. (Notwendiges Konvergenzkriterium)

Die Reihe $\sum a_n$ sei konvergent. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Die Reihe kann, muß aber nicht konvergent sein.

Theorem 7.3. (Leibniz-Kriterium)

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_0 \geq a_1 \geq \ldots \Rightarrow \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \text{ konvergent}$$

Die Monotonie Bedingung ist keine notwendige Bedingung, man kann aber auf sie nicht verzichten !

Definition 7.1. (Absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert.

Theorem 7.5. (Dreiecksungleichung für Reihen)

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n|$$

Theorem 7.6. (Majorantenkriterium)

Sei $\sum c_n$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, sowie $a_n \in$ R mit $|a_n| \le c_n$ für alle n $\in$ N_0.
Dann ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent. Man bezeichnet dabei $\sum c_n$ als Majorante von $\sum a_n$.
Dieses Kriterium dient dem Nachweis der Konvergenz einer Reihe.

Korollar 7.1. (Minorantenkriterium)

Sei $\sum d_n$ eine divergente Reihe mit nicht negativen Gliedern sowie $a_n \in$ R mit $a_n \ge d_n$ für alle n $\in$ N.
Dann ist auch die Reihe $\sum a_n$ divergent. Man bezeichnet dabei $\sum d_n$ als Minorante von $\sum a_n$.
Dieses Kriterium dient dem Nachweis der Divergenz einer Reihe.

Theorem 7.7. (Wurzelkriterium von Cauchy)

für $a_n \ge 0$: $\theta = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$,

$\theta < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent
$\theta = 1 \Rightarrow$ unbekannt
$\theta > 1 \Rightarrow$ Reihe divergent

Theorem 7.8. (Quotientenkriterium von D´Alambert)

für $a_n \ne 0$: $\theta = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,

$\theta < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent
$\theta = 1 \Rightarrow$ unbekannt
$\theta > 1 \Rightarrow$ Reihe divergent

Zusatz (aus Lösungsskript): Raabe Kriterium

für $a_n > 0$: $\theta = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$,

$\theta < -1 \Rightarrow$ Reihe konvergent
$\theta = 1 \Rightarrow$ unbekannt
$\theta > -1 \Rightarrow$ Reihe divergent

Wichtige Beispiele konvergenter und divergenter Reihen:

1.) $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2.) **geometrische Reihe**
$\sum_{n\ge0} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

3.) **Riehmannsche ζ -Funktion**
$\alpha \in R$ mit $\alpha \ge 2$
$\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$ ($\alpha > 1$ konvergent, $\alpha \le 1$ divergent)

4.) $\sum_{n\ge0} \frac{1}{n!} = \exp(1) = e$

5.) **harmonische Reihe**:
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergent

6.) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent

7.) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergent

8.) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent

9.) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergent

8. Die Exponentialfunktion:

Theorem 8.1. (Exponentialreihe)

Für jedes $x \in R$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent

Definition 8.1. (Eulersche Zahl)

Die Eulersche Zahl ist gegeben durch

$$e := \exp(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$$

Theorem 8.3. (Produktsatz von Cauchy)

Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergente Reihen, sowie die Folge (c_n) durch
$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ gegeben. Dann ist auch die Reihe $\sum c_n$ absolut konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{n\geq 0} b_n$$

Theorem 8.4. (Funktionalgleichung)

Für alle $x_1, x_2 \in R$ gilt

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$$

Korollar 8.1.

Für beliebiges $n \in N$ und beliebige $x_1, \ldots, x_n \in R$ gilt

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{n} x_m\right) = \prod_{m=1}^{n} \exp(x_m)$$

Korollar 8.2.

Für alle $x \in R$ und alle $n \in Z$ gilt

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$,

b) $\exp(x) > 0$,

c) $\exp(n) = e^n$

Zusatz (aus Lösungsskript): Die Hyperbolischen Funktionen

$\cosh : R \mapsto R$

$x \mapsto \cosh(x) : \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$,

$\sinh : R \mapsto R$

$x \mapsto \sinh(x) : \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$

Zusatz (aus Lösungsskript): Gerade, ungerade Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f : D \mapsto R$ mit $0 \in D$ und

1.) $f(-x) = f(x), \forall x \in D$, dann heißt f gerade

2.) $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$, dann heißt f ungerade

Zusatz (aus Lösungsskript): Abschätzung von 2^n nach oben und nach unten

Für $n \geq 4$

$n^2 \leq 2^n < n!$

<u>11. Eigenschaften stetiger Funktionen:</u>

Lemma 11.1. (Der Zwischenwertsatz)

Für $a,b \in R$ mit $a < b$ sei $f : [a,b] \rightarrow R$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$.
Dann besitzt f wenigstens eine Nullstelle in $]a,b[$.

Theorem 11.1. (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Für $a,b \in R$ mit $a < b$ sei $f : [a,b] \rightarrow R$ stetig sowie $\eta \in R$ eine Zahl, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.
Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) - \eta = 0$.

Proposition 11.5. (Lipschitz-Stetigkeit)

Die Funktion $f : D \to R$ genüge einer sog. LIPSCHITZ - Bedingung, d.h. es existiert eine Konstante $L > 0$, die sog. LIPSCHITZ - Konstante, so dass
$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le L \left| x_1 - x_2 \right|$ für alle $x_1, x_2 \in D$
Dann ist f stetig.

12. Logarithmus und Potenzen:

Definition 12.1. (Monotone Funktionen)

Seien $a, b \in R$ mit $a < b$. Die Funktion $f : [a,b] \to R$ heisst
(1) monoton wachsend, wenn
$f(x_1) \le f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$;
(2) streng monoton wachsend, wenn
$f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$;
(3) (streng) monoton fallend, wenn $-f$ (streng) monoton wachsend ist;
(4) (streng) monoton, wenn sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Lemma 12.4. (Interessante Grenzwerte)

Für $n \in N_0$ besteht
(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
(2) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$
(3) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n e^{\frac{1}{x}} = \infty$
(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

15. Differentiation:

Definition 15.2. (Der Ableitungsbegriff)

Sei $f : D \to R$ eine Funktion mit $x \to y := f(x)$. Existiert für ein $x_0 \in D$ der Grenzwert
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
so heisst f differenzierbar im Punkt x_0. Der Grenzwert selbst heißt Differentialquotient oder Ableitung von f im Punkt x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Theorem 15.1.

Die Funktionen $f, g : D \to R$ seien differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt :
(1) für $c\ f$ differenzierbar in x_0 mit
$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
(2) $f + g$ ist differenzierbar in x_0 mit
$(f + g)'(x_0) = g'(x_0) + f'(x_0)$
(3) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit
$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

(4) Ist $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Theorem 15.2. (Kettenregel)

Sei $g \circ f : D \to R$. Ist f differenzierbar in x_0, g differenzierbar in $y = f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 mit

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f`(x_0)$.

Theorem 15.4.

Die Funktion $f : D \to R$ sei stetig und monoton in D sowie differenzierbar in $x_0 \in D$.

Besteht $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Korollar 15.2. (logarithmische Ableitung)

Die Funktion $f : D \to]0, \infty[$ sei differenzierbar. Für alle $x \in D$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Zusammenfassung 15.4.4.
Übersicht: Ableitungen spezieller Funktionen

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
e^x	$e^x \ (x \in R)$	$\ln x$	$\frac{1}{x} \ (x > 0)$
a^x	$a^x \ln a \ (x \in R)$	x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha - 1} \ (x > 0)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e \ (x > 0)$		
$\cosh x$	$\sinh x \ (x \in R)$	$\sinh x$	$\cosh x \ (x \in R)$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} \ (x \in R)$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} \ (x > 0)$
$\text{arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \ (x > 1)$	$\text{arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \ (x \in R)$
$\text{artanh}x$	$\frac{1}{1 - x^2} \ (\lvert x \rvert < 1)$	$\text{arcoth}x$	$-\frac{1}{x^2 - 1} \ (\lvert x \rvert > 1)$
$\cos x$	$-\sin x \ (x \in R)$	$\sin x$	$\cos x \ (x \in R)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} \ (x \neq \frac{1}{2}\pi\ell)$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq \pi\ell)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (\lvert x \rvert < 1)$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (\lvert x \rvert < 1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2} \ (x \in R)$	$\text{arccot}x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (x \in R)$

Höhere Ableitung der Exponential- und Trigonometrischen Funktionen

Die Exponentialfunktion ist beliebig oft stetig differenzierbar in R und die jeweilige Abbildung ist

$$\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$$

Die trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus sind ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbar, also $\cos, \sin \in C^\infty(R)$. Für $k = 0,1,...$ sind deren k − ten Abeitungen gegeben durch :

$$(\cos^{(k)})\ \frac{d^k}{dx^k} \cos x = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi \cdot k\right) = \begin{matrix} \cos x, k \equiv 0 \bmod 4, \\ -\sin x, k \equiv 1 \bmod 4, \\ -\cos x, k \equiv 2 \bmod 4, \\ \sin x, k \equiv 3 \bmod 4, \end{matrix}$$

$$(\sin^{(k)})\ \frac{d^k}{dx^k} \sin x = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi \cdot k\right) = \begin{matrix} \sin x, k \equiv 0 \bmod 4, \\ \cos x, k \equiv 1 \bmod 4, \\ -\sin x, k \equiv 2 \bmod 4, \\ -\cos x, k \equiv 3 \bmod 4 \end{matrix}$$

16. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen:

Theorem 16.4. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Dir Funktion $f : [a,b] \to R$ sei stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$.
Dann existiert ein Punkt $\xi \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Theorem 16.6. (Monotoniekriterium)

Die Funktion $f : [a,b] \to R$ sei stetig in $[a,b]$ ud differenzierbar in $]a,b[$.
Besteht

(1) $f'(x) \underset{(>)}{\geq} 0$ für alle $x \in]a,b[$,

dann ist f (steng) monoton wachsend in $[a,b]$.

(2) $f'(x) \underset{(<)}{\leq} 0$ für alle $x \in]a,b[$,

dann ist f (streng) monoton fallend in $[a,b]$.

Theorem 16.8. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Die Funktionen $f, g : [a,b] \to R$ seien stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$ sowie $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$. Dann existiert mindestens ein Punkt $\xi \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Theorem 16.9. (Regel von Bernoulli-L´Hôspital)

Es seien $a, b, \lambda \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$. Des weiteren seien die Funktionen $f, g :]a, b[\to R$ stetig differenzierbar; es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[$ sowie

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Dann folgt aus

(1) $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0$

oder

(2) $\lim_{x \to b} g(x) = \infty$

die Existenz des (uneigentlichen) Grenzwertes

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Definition 16.4.

Die Funktion $f : I \to R$ heisst (streng) konvex, wenn für alle $x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \underset{(<)}{\leq} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Die Funktion f heisst (streng) konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Theorem 16.11. (Konvexitätskriterium)

Die Funktion $f : [a, b] \to R$ sei stetig und zweimal stetig differenzierbar in $]a, b[$.
Dann gilt:
(1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ konvex in $[a, b]$
(2) $f''(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[\Rightarrow f$ streng konvex in $[a, b]$

17. Numerische Lösung von Gleichungen:

Proposition 17.1. (Fixpunktgleichung)

(1) Sei $f : [a, b] \to R$ stetig ud es bezeichne $\varphi(x) := f(x) + x$. Dann gilt

ξ Lösung von $f(x) = 0 \Leftrightarrow \xi$ Lösung von $\varphi(x) - x = 0$

(2) Sei $f : [a, b] \to R$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ sowie

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Dann gilt

ξ Lösung von $f(x) = 0 \Leftrightarrow \xi$ Lösung von $\varphi(x) - x = 0$

Theorem 17.1. (Allgemeines Iterationsverfahren)

Sei $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ stetig differenzierbar in $[a, b]$, die überdies

$$|\varphi'(x)| \leq L \text{ für alle } x \in [a, b]$$

mit einer Konstanten $L < 1$ erfüllt. Dann existiert genau ein Fixpunkt $\xi \in [a, b]$ mit $\xi = \varphi(\xi)$.

Das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n \in N_0)$$

konvergiert bei beliebiger Wahl des Startwertes $x_0 \in [a,b]$ gegen diesen Fixpunkt.

Überdies besteht die a - priori - Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \text{ für alle } n \in N$$

sowie die a - posteriori - Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \text{ für alle } n \in N$$

Theorem 17.3. (Newtonsches Verfahren – globale Konvergenz)

Es sei $f:[a,b] \to R$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften (lokale Konvergenz)

(NL1) $f \in C^2[a,b]$

(NL2) $f(a)f(b) < 0$

(NL3) $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$

sei zudem noch folgende Eigenschaften erfüllt (globale Konvergenz)

(NG1) $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f''(x) \le 0$ für alle $x \in [a,b]$

(NG2) $\left|\frac{f(c)}{f'(c)}\right| \le b-a$ mit $c := \begin{cases} a, \text{ falls } \min\limits_{x\in\{a,b\}} |f'(x)| = |f'(a)| \\ b, \text{ falls } \min\limits_{x\in\{a,b\}} |f'(x)| = |f'(b)| \end{cases}$

dann konvergiert das Newtonsche Verfahren mindestens quadratisch für jedes $x_0 \in [a,b]$ gegen die (eindeutige) Lösung ξ von $f(x) = 0$. Mit $\mu := |f'(c)|$ besteht die Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_n| \le \tilde{\Delta}_n := \frac{|f(x_n)|}{\mu} \text{ für alle } n \in N_0$$

18. Das Riemannsche Integral:

Theorem 18.4.

Sei $f:[a,b] \to R$ stetig, Dann ist f integrierbar.

Theorem 18.6. (Linearität, Monotonie des Integrals)

Seien $f, f:[a,b] \to R$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in R$. Dann gilt

(1) $\int_a^b (f_1(t) + f_2(t))dt = \int_a^b f_1(t)dt + \int_a^b f_2(t)dt$

(2) $\int_a^b (\lambda f_1(t))dt = \lambda \int_a^b f_1(t)dt$

(3) $\int_a^b f_1(t)dt \le \int_a^b f_2(t)dt$, falls $f_1 \le f_2$

Theorem 18.7.

Seien $f, g : [a,b] \to R$ integrierbare Funktionen. Dann gilt
(1) Die Funktionen f_+ und f_- sind integrierbar.
(2) Für $p \in R$ mit $p \geq 1$ ist $|f|^p$ integrierbar.
(3) Das Produkt $fg : [a,b] \to R$ ist integrierbar.

Theorem 18.8. (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g : [a,b] \to R$ stetige Funktionen sowie $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$.
Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass

(1) $$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\xi)\int_a^b g(t)dt.$$

Speziell mit $g(t) = 1$ gilt

(2) $$\int_a^b f(t)dt = (b-a) \cdot f(\xi).$$

<u>19. Integration und Differentiation:</u>

Theorem 19.3. (Hauptsatz der Analysis)

Sei $f : I \to R$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f.
Für alle $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

oder andere Schreibweise :

$$\int f(t)dt = F(x)\Big|_a^b$$

Liste von unbestimmten Integralen bekannter Funtionen $(C \in R)$:

unbestimmtes Integral	Stammfunktion	Notiz
$\int t^\alpha dt$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$	$\alpha > -1 : x \in R$ $\alpha < -1 : x \in R_+$
$\int \frac{dt}{t}$	$\ln\|x\| + C$	$x \in R : x \neq 0$
$\int e^t dt$	$e^x + C$	$x \in R$
$\int a^t dt$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$1 \neq a \in R_+ : x \in R$
$\int \cosh t\, dt$	$\sinh x + C$	$x \in R$
$\int \sinh t\, dt$	$\cosh x + C$	$x \in R$
$\int \cos t\, dt$	$\sin x + C$	$x \in R$
$\int \sin t\, dt$	$-\cos x + C$	$x \in R$

$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin x + C$	$x \in R : \lvert x \rvert < 1$
$\int \frac{dt}{1+t^2}$	$\arctan x + C$	$x \in R$

Theorem 19.4. (Integrand der Gestalt g'/g)

Sei $g : [a,b] \to R$ eine stetige Funktion mit $g(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.
Dann gilt

$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln\lvert g(t)\rvert \Big|_a^b$$

Theorem 19.5. (Substitutionsregel)

Sei $f : I \to R$ eine stetige Funktion sowie $g : [a,b] \to R$ eine stetige differenzierbare Funktion mit $g([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Korollar 19.1.

Sei $f : I \to R$ eine stetige Funktion sowie $c \in R$. Dann gilt

(1) $\displaystyle\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx \quad (c \neq 0)$

(3) $\displaystyle\int_a^b tf(t^2)dt = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$

Theorem 19.6. (Partielle Integration)

Seien $f, g : [a,b] \to R$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Theorem 19.7. (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g : [a,b] \to R$ Funktionen, wobei f stetig differenzierbar und monoton, g stetig ist.
Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)dx$$

20. Uneigentliche Integrale:

Definition 20.1.

Sei $f:[a,\infty[\to R$ eine Funktion, die in jedem Intervall $[a,\rho]$ mit $a<\rho<\infty$ integrierbar ist.
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_a^{\rho} f(x)dx$$

dann heisst das Integral $\int_a^{\rho} f(x)\,dx$ konvergent, andernfalls divergent.
Im konvergenten Fall setzt man abkürzend

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{\rho\to\infty}\int_a^{\rho} f(x)dx$$

Für eine Funktion $f:]-\infty,a]$ definiert man entsprechend

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt := \lim_{\rho\to-\infty}\int_{\rho}^{a} f(t)dt$$

falls der Grenzwert rechter Hand existiert.

Definition 20.2.

Sei $f:]a,b]\to R$ eine Funktion, die in jedem Teilintervall $[a+\varepsilon,b]$ für $\varepsilon\in R$ mit $0<\varepsilon<b-a$ integrierbar ist. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

dann heisst das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, andernfalls divergent. Im konvergenten Fall setzt man abkürzend

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Theorem 20.1. (Integralvergleichskriterium)

Sei $f:[1,\infty[\to R$ eine monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n\geq 1} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

21. Potenzreihen:

Theorem 21.1. (Konvergenzverhalten komplexer Potenzreihen)

Für das Konvergenzverhalten einer komplexen Potenzreihe $\sum a_k z^k$ gilt wahlweise:
(1) Die Potenzreihe ist nur für $z=0$ absolut konvergent.
(2) Die Potenzreihe ist für alle $z\in C$ absolut konvergent.
(3) Es existiert genau ein $r\in R$ mit $r>0$, so dass die Potenzreihe für $|z|<r$ absolut konvergent und für $|z|>r$ divergent ist.

Theorem 21.2. (Konvergenzverhalten reeller Potenzreihen)

Für das Konvergenzverhalten einer reellen Potenzreihe $\sum a_k x^k$ gilt wahlweise:

(1) Die Potenzreihe ist nur für $x = 0$ absolut konvergent.

(2) Die Potenzreihe ist für alle $x \in R$ absolut konvergent.

(3) Es existiert genau ein $r \in R$ mit $r > 0$, so dass die Potenzreihe für $|x| < r$ absolut konvergent und für $|x| > r$ divergent ist.

Theorem 21.3. (Satz von Cauchy und Hadamard)

Sei $\sum a_k z^k$ eine komplexe oder reelle Potenzreihe mit $|a_k| > 0$ für alle $k \ge k_0 \in N_0$.
Ferner bezeichne ρ einen der beiden Grenzwerte

$$\rho_Q := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}, \quad \rho_W := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Dann gilt

(1) $\rho = 0$: Konvergenzradius $r = \infty$, d.h. $K = C$ oder $K = R$;

(2) $\rho = \infty$: Konvergenzradius $r = 0$, d.h. $K = \{0\}$;

(3) $0 < \rho < \infty$: Konvergenzradius $r = \dfrac{1}{\rho}$.

Theorem 21.6.

Sei $\sum a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die Funktion $f :]-r, r[\to R$ mit

$$x \to f(x) := \sum_{k\ge 0} a_k x^k$$

stetig.

Theorem 21.7. (Identitätssatz)

Seien $f(x) = \sum a_k x^k$ und $g(x) = \sum b_k x^k$ zwei Potenzreihen mit dem gemeinsamen offenen Konvergenzbereich $]-r, r[$.
Besteht

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in]-r, r[,$$

dann sind beide Potenzreihen identisch, d.h. es besteht

$$a_k = b_k \text{ für alle } k \in N_0.$$

22. Taylor-Reihen:

Definition 22.1.

Für $n \in N_0$ sei die Funktion $f : I \to R$ n-mal differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$.
Das Polynom $T_n : I \to R$ mit

$$x \to T_n(x) := T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heisst n-tes Taylorsches Polynom von f im Punkt x_0.

Theorem 22.1. (Taylorsche Formel)

Für $n \in N_0$ sei die Funktion $f : I \to R$ $(n+1)$ - mal differenzi erbar in I sowie $x, x_0 \in I$ fest.
Dann gilt :
(1) $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$
Das Restglied R_n ist für alle $m = 1,..., n+1$ gegeben durch

(2) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, m}(x - x_0)^m (x - \xi)^{n+1-m}$

mit $\xi \in \rangle x, x_0 \langle$. Im Fall $x = x_0$ ist $\xi := x_0$.
Darstellung von Lagrange $(m := n+1)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Darstellung von Cauchy $(m = 1)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)(x - \xi)^n$$

Definition 22.2.

Die Funktion $f : I \to R$ sei beliebg oft differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$.
Dann heisst

$$T(x) := T(x, x_0) := \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die Taylor - Reihe von f im Punkt x_0. Im Fall $x_0 = 0 \in I$ heisst $T(x,0)$
auch MacLaurin.Reihe von f.

Theorem 22.2. (Taylorscher Satz)

Ist die Funktion $f : I \to R$ beliebig oft differenzierbar in I, dann lässt sich f im Punkt $x \in I$ genau dann durch die Taylor - Reihe in $x_0 \in I$ darstellen, d.h. es ist

$$T(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x)$$

wenn gilt :

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Theorem 22.3.

Sei $f : I \to R$ eine beliebig oft differenzi erbare Funktion in I und $x, x_0 \in I$ fest.
Ferner existiere ein $M > 0$ derart, dass

$$\max_{t \in \langle x, x_0 \rangle} \left| f^{(k)}(t) \right| \leq M \quad \text{für alle } k \in N_0.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Theorem 22.4. (Satz von Bernstein)

Sei $f:[a,b]\to R$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit

$$f^{(k)}(t)\geq -L \text{ für alle } t\in[a,b], k\in N_0$$

sowie $x_0\in[a,b]$ fest. Dann gilt

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (x\in]a,b[).$$

Korollar 22.1.

Sei $f:[a,b]\to R$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, deren Ableitungen ab $n=N\in N_0$ ein festes Vorzeichen in $[a,b]$ besitzen, also

$$f^{(n)}(t)>0 \text{ oder } f^{(n)}(t)<0 \quad \text{für alle } t\in[a,b], n\in N_0 \text{ mit } n\geq N.$$

Ferner sei $x_0\in[a,b]$ fest. Dann gilt:

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (x\in]a,b[).$$

22.5. Anwendung auf einige spezielle Funktionen.

Theorem 22.5.

Für $x\in R$ gilt:

$$e^x=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$$

Korollar 22.2.

Für $x\in R$ gilt:

$$\cosh x=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\sinh x=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Theorem 22.6.

Für $x\in]-1,1]$ gilt:

$$\ln(1+x)=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$$

Theorem 22.7.

Für $x\in R$ gilt:

$$\cos x=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\sin x=\sum\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$