W. Recknagel
FB 07 Informatik/Mathematik
Fachhochschule München

Vorprüfung in Mathematik II

5.VII.2001

Hinweise. Die Bearbeitung der Prüfungsaufgaben soll ein schriftlicher Nachweis – ggf. mittels farbiger Skizzen – dafür sein, welche Zwischenschritte und welche Begründungen für die Lösung verwendet wurden. Die Bearbeitungen sind zusammen mit dem unterschriebenen Aufgabenblatt abzugeben.

Zeitdauer: 90 Minuten, Hülfsmittel: alle eigenen.

Unterschrift	....								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ (Punkte/92)	Endnote
Punktzahl									

"*In Prüfungen stellen Narren Fragen, die Weise nicht beantworten können*" (OSCAR WILDE). Viel Erfolg!

Aufgabe 1 ($\boxed{12}$ Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a,b \geq 0$ gilt

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Wann besteht das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 2 ($12+2+2 = \boxed{16}$ Punkte)

Es bezeichne $I := [4.8, 5.0]$. Untersuchen Sie die Funktion $\varphi\colon\ I \to \mathbb{R}$ definiert vermöge

$$x \mapsto \varphi(x) := \frac{1}{2}x^2 - 5x - 5\mathrm{e}^{-x}$$

numerisch auf Extremwerte.

a) Überprüfen Sie die Voraussetzungen zur Anwendung des NEWTON–Verfahrens (globale Konvergenz).

b) Berechnen Sie mittels des NEWTON–Verfahrens die Lage der Extremalstelle auf drei Dezimalstellen genau (a–posteriori-Abschätzung!). Verwenden Sie dabei $x_0 := 5$ als Startwert.

c) Charakterisieren Sie die Extremalstelle hinsichtlich Minimum/Maximum.

Aufgabe 3 ($\boxed{8}$ Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie – wie auch immer – die Gültigkeit von

$$L_n := \lim_{x \to \infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Aufgabe 4 ($\boxed{12}$ Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie unter Verwendung der partiellen Integrationsmethode durch vollständige Induktion:

$$I_n := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx = n!.$$

Hinweis. Unterwegs können Sie getrost das Resultat $L_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Aufgabe 3 heranziehen.

Aufgabe 5 ($\boxed{12}$ Punkte)
Ermitteln Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$p(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{3^n n!}{2^n n^n} x^n.$$

Aufgabe 6 ($2+8+8+2 = \boxed{20}$ Punkte)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\left\{\begin{matrix} 2y'' = 4y' + 6y + 2\cos x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{matrix}\right\}$$

a) Klassifizieren Sie nach allfälliger Umformung die Differentialgleichung (DGL).
b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen DGL.
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL mittels "*Ansatz rechte Seite*".
d) Lösen Sie die AWA.

Hinweis ad c) Mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ setze man zur Gewinnung einer partikulären Lösung

$$y_p(x) := \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Aufgabe 7 ($2+10 = \boxed{12}$ Punkte)
Für eine positive Konstante $c \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$\mathcal{B} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y = c \ \text{ und } \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c} \ \text{ und } \ x,y \geq 0\}.$$

a) Skizzieren Sie graphisch den in Rede stehenden Bereich $\mathcal{B}$.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{B}$.